TITLE:

非有界被覆面上の正値調和関数 (調和・解析関数空間と線形作用素)

AUTHOR(S):

瀬川, 重男; 正岡, 弘照

CITATION:

瀬川, 重男 ...[et al]. 非有界被覆面上の正値調和関数 (調和・解析関数空間と線形作用素). 数理解析研究所講究録 1998, 1049: 64-73

ISSUE DATE:

1998-06

URL:

http://hdl.handle.net/2433/62203

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
1049巻 1998年 64-73

非有界被覆面上の正値調和関数

大同工大　瀬川重男　(Shigeo Segawa)
京都産大・理　正岡弘照　(Hiroaki Masaoka)

1. Wを Green 関数が存在する Riemann 面とする. W上の正値調和関数全体を $HP(W)$ で表す. よく知られているように, 各 $h\in HP(W)$ は Wの minimal Martin 境界Δ_1上の正測度μと W上の Martin 核 k_pにより,

$$h(z)=\int_{\Delta_1}k_p(z)d\mu(p) \tag{1}$$

と積分表現される (cf. [C-C], [HL]). $W\in O_G$ ($\Leftrightarrow W$上の Green 関数が存在しない) の場合, Wの局所円板 Uをとり, $HP(W,U)=\{h\in HP(W\setminus\overline{U})\cap C(W\setminus U):\ h|_{\partial U}=0\}$ を考える. $HP(W,U)$ の元も, $W\setminus\overline{U}$上の Martin 核を使って, 同様に積分表現される. このように, $HP(W)$ または $HP(W,U)$ の構造を解析するためには, Δ_1を調べることが本質的である.

開 Riemann 面 Rの m 葉非有界被覆面 $(1<m<\infty)$ 全体を $\mathcal{E}_m(R)$ とする. 本論の主目的は, Rと$\widetilde{R}\in\mathcal{E}_m(R)$ の minimal Martin 境界の関係を調べることである. $\widetilde{R}\in\mathcal{E}_m(R)$ に対し, $\pi=\pi_{\widetilde{R}}$を$\widetilde{R}$から Rへの射影, R^* (resp. $\widetilde{R}^*$) を R (resp. $\widetilde{R}$) の Martin compact 化とし, R (resp. $\widetilde{R}$) の Martin 境界を$\Delta=\Delta^R$ (resp. $\widetilde{\Delta}=\Delta^{\widetilde{R}}$) で表す. このとき, $\pi_{\widetilde{R}}$の$\widetilde{R}^*$への連続拡張$\pi^*=\pi^*_{\widetilde{R}}$が存在する (命題 4). R (resp. $\widetilde{R}$) の minimal Martin 境界を$\Delta_1=\Delta_1^R$ (resp. $\widetilde{\Delta}_1=\widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}$) で表す. 各 $p\in\Delta$に対し, $\widetilde{\Delta}_1(p)=\widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}(p)=\pi^{*-1}_{\widetilde{R}}(p)\cap\widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}$とおき$\widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}(p)$ の濃度 (個数) を$\nu(p)=\nu_{\widetilde{R}}(p)$ で表す. 主結果は次の通りである.

定理 1. $\widetilde{R}\in\mathcal{E}_m(R)$ **とする.**
(i) $p\in\Delta^R\setminus\Delta_1^R$**かつそのときに限り,** $\nu_{\widetilde{R}}(p)=0$.
(ii) $p\in\Delta_1^R$**のとき,** $1\le\nu_{\widetilde{R}}(p)\le m$.

定理 2. $R\notin O_G$, $\widetilde{R}\in\mathcal{E}_m(R)$ **のとき,** $HP(\widetilde{R})=HP(R)\circ\pi$**となるための必要十分条件は, 任意の** $p\in\Delta_1^R$**に対して** $\nu_{\widetilde{R}}(p)=1$ **となることである.**

各 $p\in\Delta_1^R$に対して, Rの連結開集合 Mで $R\setminus M$が pで minimally thin (cf. 4 節) であるものの class を $\mathcal{M}_R(p)$ で表す. さらに, 各 $M\in\mathcal{M}_R(p)$ に対し, $\pi_{\widetilde{R}}^{-1}(M)$ の成分の個数を $n_{\widetilde{R}}(M)$ で表す. このとき, $\nu_{\widetilde{R}}(p)$ は次のように決定される.

定理 3. $p\in\widetilde{\Delta}_1^R$, $\widetilde{R}\in\mathcal{E}_m(R)$ **に対し,** $\nu_{\widetilde{R}}(p)=\max_{M\in\mathcal{M}_R(p)}n_{\widetilde{R}}(M)$.

2. 開 Riemann 面 $R\ (\notin O_G)$ と $\widetilde{R}\in\mathcal{E}_m(R)$ に対し, $g(\cdot,\cdot)$ (resp. $\tilde{g}(\cdot,\cdot)$) を R (resp. $\widetilde{R}$) 上の Green 関数とする. 定点 $a\in R$ (resp. $\pi_{\widetilde{R}}(\tilde{a})=a$ となる $\tilde{a}$) に対し, $k_z(\cdot)=g(\cdot,z)/g(a,z)$ (resp. $\tilde{k}_{\tilde{z}}(\cdot)=\tilde{g}(\cdot,\tilde{z})/\tilde{g}(\tilde{a},\tilde{z})$) を z (resp. $\tilde{z}$) を極とする **Martin 核**と言う. $\{f_w(\cdot):f_w(\cdot)=k_\cdot(w),\ w\in R\}$ の各関数が $[0,\infty]$ 値連続拡張をもつ Rの最小の compact 化を Rの **Martin compact 化**と言う (cf. [C-C], [HL]). また, $\Delta=\Delta^R=R^*\setminus R$ (resp. $\widetilde{\Delta}=\widetilde{\Delta}^{\widetilde{R}}=\widetilde{R}^*\setminus\widetilde{R}$) を R (resp. $\widetilde{R}$) の **Martin 境界**と言う. $p\in\Delta^R$に対し, k_pが **minimal 関数** ($\Leftrightarrow h\in HP(R)$ が $0\le h\le k_p$をみたすとき, $h=ck_p$となる正定数 c が存在) であるとき, p を **minimal(境界)点**であると言う. R (resp. $\widetilde{R}$) の minimal 点全体$\Delta_1=\Delta_1^R$ (resp. $\widetilde{\Delta}_1=\widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}$) を **minimal 境界**と言う. $R\in O_G$の場合, Rの局所円板 Uをとり (このとき, $R\setminus\overline{U}\notin O_G$), $(R\setminus\overline{U})^*\cup\overline{U}$を Rの Martin compact 化と言う. $R\in O_G$の場合にもほぼ同様に議論できるので, 以下では簡単のために, $R\notin O_G$として議論する.

$\widetilde{R}$上の函数$\tilde{u}$に対して, R上の函数$\varphi[\tilde{u}]$ を

$$\varphi[\tilde{u}](\zeta)=\sum_{\tilde{\zeta}\in\pi^{-1}(\zeta)} n_{\tilde{\zeta}}\tilde{u}(\tilde{\zeta})$$

で定義する ($n_{\tilde{\zeta}}$は$\widetilde{R}$の$\tilde{\zeta}$における分岐の重複度 (multiplicity)). 明らかに, $\tilde{u}$が調和 (resp. 優調和) ならば $\varphi[\tilde{u}]$ も調和 (resp. 優調和) である. また, Green 函数については

$$\varphi[\tilde{g}_{\tilde{p}}]=g_p\quad(\pi(\tilde{p})=p).\tag{2}$$

命題 4. $\widetilde{R}\in\mathcal{E}_m(R)$ **から** R**への射影**$\pi_{\widetilde{R}}$**に対し, その**$\widetilde{R}^*$**への連続拡張**$\pi^*_{\widetilde{R}}$**が unique に存在する. 特に,** $\pi^*_{\widetilde{R}}(\widetilde{\Delta}^{\widetilde{R}})=\Delta^R$ **である.**

証明. 連続拡張$\pi^*_{\widetilde{R}}$の存在を示せば, 残りの主張は明らかである. 任意の$\tilde{p}\in\widetilde{\Delta}^{\widetilde{R}}$に対して, $\tilde{p}$に収束する$\widetilde{R}$内の 2 つの点列 $\{\tilde{p}_{in}\}$ $(i=1,2)$ をとり $p_{in}=\pi(\tilde{p}_{in})$ とおく. $\lim_{n\to\infty}p_{in}=p_i\ (\in\Delta^R)$ と仮定して, $p_1=p_2$を示せばよい. 一般に, $\pi(\tilde{q})=q$とするとき, (2) より

$$\varphi[\tilde{k}_{\tilde{q}}]=\frac{1}{\tilde{g}_{\tilde{q}}(\tilde{a})}\varphi[\tilde{g}_{\tilde{q}}]=\frac{g_q}{\tilde{g}_{\tilde{q}}(\tilde{a})}=c_{\tilde{q}}k_q\qquad(c_{\tilde{q}}=\frac{g_q(a)}{\tilde{g}_{\tilde{q}}(\tilde{a})}).$$

したがって, $\varphi[\tilde{k}_{\tilde{p}_{in}}]=c_{in}k_{p_{in}}$をみたす正定数 c_{in}が存在する. これと$\lim_{n\to\infty}\varphi[\tilde{k}_{\tilde{p}_{in}}]=\varphi[\tilde{k}_{\tilde{p}}]$ および$\lim_{n\to\infty}k_{p_{in}}=k_{p_i}$ $(i=1,2)$ より, 正定数 c_1, c_2が存在して, $c_1k_{p_1}=c_2k_{p_2}$となる. したがって, $k_{p_1}(a)=k_{p_2}(a)$ より $k_{p_1}=k_{p_2}$, 即ち $p_1=p_2$となる. □

命題 4 の証明を読み返せば, 次のことは容易に確かめられる.

補題 5. 各$\tilde{p}\in\widetilde{R}^*$**対して, 正定数** c **が存在して**

$$\varphi[\tilde{k}_{\tilde{p}}]=ck_p\quad(\pi^*(\tilde{p})=p).\tag{3}$$

$R(\notin O_G)$ 上の正値優調和関数全体を $\mathcal{S}_R$で表す. $s(\in \mathcal{S}_R)$ と $E(\subset R)$ に対し,

$$ {}^R\widehat{\mathrm{R}}_s^E(z) := \liminf_{w\to z}\ \inf\{u(w) : u \in \mathcal{S}_R,\ u \geq s \text{ on } E\} $$

を Eに関する s の **balayage** と言う (balayage の基本事項については, [C-C], [HL], [B], [B-H] 等を参照のこと). 次の補題は, 簡単ながら有用である (cf. [M-S1]).

補題 6. R**の部分集合** E**と** R**上の正値優調和関数** s **及び**$\widetilde{R} \in \mathcal{E}_m(R)$ **に対して,**

$$ {}^{\widetilde{R}}\widehat{\mathrm{R}}_{s\circ\pi_{\widetilde{R}}}^{\pi_{\widetilde{R}}^{-1}(E)} = {}^R\widehat{\mathrm{R}}_s^E \circ \pi_{\widetilde{R}}. \tag{4} $$

3. 定理 1 及び 2 の証明のためには, 以下の命題 7 及び 8 を示せば良い. 実際, 定理 1 は命題 7 及び 8 から明らかである. また, 定理 2 は命題 8 と Martin の積分表現定理 (1) から容易に従う. 各 $p \in \Delta^R$と$\widetilde{R} \in \mathcal{E}_m(R)$ に対して, $\widetilde{\Delta}_1(p) = \widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}(p) = \pi_{\widetilde{R}}^{*-1}(p) \cap \widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}$とおくこと及び$\widetilde{\Delta}_1(p)$ の濃度 (個数) を$\nu(p) = \nu_{\widetilde{R}}(p)$ で表すことを再言しておく. 本節と次節では, 簡単のため, $\widetilde{R}$上の balayage ${}^{\widetilde{R}}\widehat{\mathrm{R}}_{\tilde{s}}^{\widetilde{E}}$を単に$\widehat{\mathrm{R}}_{\tilde{s}}^{\widetilde{E}}$と表し, $\pi_{\widetilde{R}} = \pi$とおくことにする.

命題 7. $p \in \Delta^R - \Delta_1^R$, $\widetilde{R} \in \mathcal{E}_m(R)$ **とする. このとき,** $n_{\widetilde{R}}(p) = 0$.

証明. $\widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}(p) \neq \emptyset$ と仮定して矛盾を導く. $\tilde{p} \in \widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}(p)$ とする. (3) より, $\varphi[\tilde{k}_{\tilde{p}}] = ck_p\,(c > 0)$, 故に

$$ \tilde{k}_{\tilde{p}} \leq ck_p \circ \pi. $$

任意の $r\,(> 0)$ に対し $F_r = \{q \in R^* : d(p, q) \leq r\}$ ($d(\cdot,\cdot)$ は R^*上の距離) とおくと, $\pi^{*-1}(F_r)$ は$\tilde{p}$の近傍である. したがって $E_r = F_r \cap R$とおくと, (4) より

$$ {}^R\widehat{\mathrm{R}}_{k_p}^{E_r} \circ \pi = \widehat{\mathrm{R}}_{k_p\circ\pi}^{\pi^{-1}(E_R)} \geq c^{-1}\widehat{\mathrm{R}}_{\tilde{k}_{\tilde{p}}}^{\pi^{-1}(E_r)} = c^{-1}\tilde{k}_{\tilde{p}}. \tag{5} $$

一方, Martin 基本定理より,

$$ k_p = \int k_q d\mu(q) $$

となるようなΔ_1^R上の正測度μが存在する.

$$ h_r = \int_{\Delta_1^R \cap F_r} k_q d\mu(q), \qquad f_r = k_p - h_r = \int_{\Delta_1^R - F_r} k_q d\mu(q) $$

とおくとき, (5) より

$$ {}^R\widehat{\mathrm{R}}_{k_p}^{E_r} \circ \pi = {}^R\widehat{\mathrm{R}}_{h_r}^{E_r} \circ \pi + {}^R\widehat{\mathrm{R}}_{f_r}^{E_r} \circ \pi \geq c^{-1}\tilde{k}_{\tilde{p}}. $$

ここで, ${}^R\widehat{\mathrm{R}}_{f_r}^{E_r} = \int_{\Delta_1^R - F_r} {}^R\widehat{\mathrm{R}}_{k_q}^{E_r} d\mu(q)$ は R上の potential である (cf. e.g. [HL]) から, ${}^R\widehat{\mathrm{R}}_{f_r}^{E_r} \circ \pi$ は$\widetilde{R}$上の potential である. 故に

$$h_r \circ \pi \geq {}^R\widehat{\mathrm{R}}_{h_r}^{E_r} \circ \pi \geq c^{-1} \tilde{k}_{\tilde{p}}.$$

ところが, $p \in \Delta^R - \Delta_1^R$より$\lim_{r \downarrow 0} h_r = 0$ であるから, これは矛盾である. □

命題 8. $p \in \Delta_1^R$, $\widetilde{R} \in \mathcal{E}_m(R)$ **とする. このとき,** $1 \leq \nu_{\widetilde{R}}(p) \leq m$. **さらに,** $\widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}(p) = \{\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_n\}$ **とおくとき, 正定数** $c_1, \cdots, c_n$**が存在して**

$$k_p \circ \pi = c_1 \tilde{k}_{\tilde{p}_1} + \cdots + c_n \tilde{k}_{\tilde{p}_n}. \tag{6}$$

証明. 先ず, $\nu_{\widetilde{R}}(p) \leq m$ を示す (cf. [H]). $\widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}(p)$ の任意の有限部分集合 $\{\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_n\}$ に対し, $n \leq m$ を示せばよい. (3) より, 正定数 b_i $(i = 1, \cdots, n)$ が存在して$\varphi[\tilde{k}_{\tilde{p}_i}] = b_i k_p$, したがって $b_i^{-1} \tilde{k}_{\tilde{p}_i} \leq k_p \circ \pi$となる. これより

$$k_p \circ \pi \geq \sum_{i=1}^n b_i^{-1} \tilde{k}_{\tilde{p}_i} \tag{7}$$

となる. 故に

$$m k_p = \varphi[k_p \circ \pi] \geq \varphi[\sum_{i=1}^n b_i^{-1} \tilde{k}_{\tilde{p}_i}] = \sum_{i=1}^n b_i^{-1} \varphi[\tilde{k}_{\tilde{p}_i}] = \sum_{i=1}^n k_p = n k_p,$$

即ち $m \geq n$ が得られた.

次に, $\nu_{\widetilde{R}}(p) \geq 1$ を示す. Martin 基本定理により

$$k_p \circ \pi = \int \tilde{k}_{\tilde{q}} d\tilde{\mu}(\tilde{q})$$

となる$\widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}$上の正測度$\tilde{\mu}$が存在する. $\tilde{\mu}$の support が$\widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}(p)$ に含まれることを示せばよい. F_r, E_rは命題 7 の証明と同様とし, さらに

$$\tilde{f}_r = \int_{\widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}} - \pi^{*-1}(F_r)} \tilde{k}_{\tilde{q}} d\tilde{\mu}(\tilde{q})$$

とおく. 各$\tilde{q} \in \widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}} - \pi^{*-1}(F_r)$ に対し$\widehat{\mathrm{R}}_{\tilde{k}_{\tilde{q}}}^{\widetilde{R} - \pi^{-1}(E_r)} = \tilde{k}_{\tilde{q}}$だから, $\widehat{\mathrm{R}}_{\tilde{f}_r}^{\widetilde{R} - \pi^{-1}(E_r)} = \tilde{f}_r$である (cf. e.g. [HL]). 故に, (4) を使って

$$\tilde{f}_r = \widehat{\mathrm{R}}_{\tilde{f}_r}^{\widetilde{R} - \pi^{-1}(E_r)} \leq \widehat{\mathrm{R}}_{k_p \circ \pi}^{\widetilde{R} - \pi^{-1}(E_r)} = {}^R\widehat{\mathrm{R}}_{k_p}^{R - E_r} \circ \pi.$$

ところが ${}^R\widehat{\mathrm{R}}_{k_p}^{R - E_r}$ は R上の potential であるから, ${}^R\widehat{\mathrm{R}}_{k_p}^{R - E_r} \circ \pi$は$\widetilde{R}$上の potential である. 故に$\tilde{f}_r = 0$, 即ち$\tilde{\mu}$の support は$\widetilde{\Delta}_1 \cap \pi^{*-1}(F_r)$ に含まれる. $r > 0$ は任意だから, $\tilde{\mu}$の support は$\widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}(p)$ に含まれることになる.

最後に, $\tilde{\mu}$の support は$\widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}(p)$ に含まれることと (7) より, $\widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}(p) = \{\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_n\}$ とおけば, $k_p \circ \pi = \sum_{i=1}^n c_i \tilde{k}_{\tilde{p}_i}$ $(c_i > 0)$ となる. □

4. ここでは定理 3 の証明を与える. まず, minimally thin と minimal fine neighborhood の定義を与える.

定義. $p \in \Delta_1^R$とする. Rの部分集合 Eが p で **minimally thin** であるとは, ${}^R\widehat{\mathrm{R}}_{k_p}^E \neq k_p$が成立する (${}^R\widehat{\mathrm{R}}_{k_p}^E$が potential であることと同値) ことである. また, Rの部分集合 Mに対し, $M \cup \{p\}$ が p の **minimal 細近傍**であるとは, $R - M$が p で minimally thin となることである.

この定義と balayage の基本性質から, 次のことは容易に分かる.

事実 (A). **Rの部分集合 E_1, E_2が $p \in \Delta_1^R$で minimally thin であるとき, $E_1 \cup E_2$は p で minimally thin である. また, $M_1 \cup \{p\}$, $M_2 \cup \{p\}(M_1, M_2 \subset R)$ が p の minimal fine neighborhood であるとき, $(M_1 \cap M_2) \cup \{p\}$ は p の minimal fine neighborhood である.**

1 節で述べたように, Rの連結開集合 Mで $R \setminus M$が p での minimally thin となるものの class を $\mathcal{M}_R(p)$ で表し, さらに, 各 $M \in \mathcal{M}_R(p)$ に対し, $\pi^{-1}(M)$ の成分の個数を $n_{\widetilde{R}}(M)$ で表す. 定理 3 の証明において, 次の命題 9 は本質的な役割を果たす (cf. [M]).

命題 9. **$p \in \Delta_1^R$, $\widetilde{E} \subset \widetilde{R}$とする. このとき, $\widetilde{E}$が$\widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}(p)$ の各点で minimally thin であるための必要十分条件は, $\pi(\widetilde{E})$ が p で minimally thin であることである.**

証明. 必要性 : $\{R_n\}$ を Rの exhaustion とし, $\widetilde{E}_n = \widetilde{E} - \pi^{-1}(R_n)$ とおく. 各$\tilde{p} \in \widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}(p)$ に対して$\widehat{\mathrm{R}}_{\tilde{k}_{\tilde{p}}}^{\widetilde{E}}$は potential だから, (6) より, $\widehat{\mathrm{R}}_{k_p \circ \pi}^{\widetilde{E}} = \sum_{\tilde{p} \in \widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}(p)} c_{\tilde{p}} \widehat{\mathrm{R}}_{\tilde{k}_{\tilde{p}}}^{\widetilde{E}}$ も potential である. 故に

$$\lim_{n \to \infty} \widehat{\mathrm{R}}_{k_p \circ \pi}^{\widetilde{E}_n} = 0$$

となる. これと${}^R\widehat{\mathrm{R}}_{k_p}^{\pi(\widetilde{E}_n)} \leq \varphi[\widehat{\mathrm{R}}_{k_p \circ \pi}^{\widetilde{E}_n}]$ より,

$$\lim_{n \to \infty} {}^R\widehat{\mathrm{R}}_{k_p}^{\pi(\widetilde{E}_n)} = 0$$

となる. これと${}^R\widehat{\mathrm{R}}_{k_p}^{\pi(\widetilde{E}) \setminus \pi(\widetilde{E}_n)}$が potential であることから, ${}^R\widehat{\mathrm{R}}_{k_p}^{\pi(\widetilde{E})}$が potential であることが容易に示される. 即ち$\pi(\widetilde{E})$ は p で minimally thin である.

十分性 : ${}^R\widehat{\mathrm{R}}_{k_p}^{\pi(\widetilde{E})}$が R上の potential であるから, ${}^R\widehat{\mathrm{R}}_{k_p}^{\pi(\widetilde{E})} \circ \pi$は$\widetilde{R}$上の potential である. $\tilde{p} \in \widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}(p)$ を任意にとり, $k_p \circ \pi \geq c\tilde{k}_{\tilde{p}}$をみたす正定数 c をとる. (4) より,

$${}^R\widehat{\mathrm{R}}_{k_p}^{\pi(\widetilde{E})} \circ \pi = \widehat{\mathrm{R}}_{k_p \circ \pi}^{\pi^{-1}(\pi(\widetilde{E}))} \geq c\widehat{\mathrm{R}}_{\tilde{k}_{\tilde{p}}}^{\widetilde{E}}.$$

これより, $\widehat{\mathrm{R}}_{k_{\tilde{p}}}^{\widetilde{E}}$は$\widetilde{R}$上の potential, 即ち$\widetilde{E}$は$\tilde{p}$で minimally thin である. □

定理 3 の証明では, 上の命題 9 の他に次の事実が使われる (cf. [N]).

事実 (B). Uを Rの開集合で $U \cup \{p\}$ が $p(\in \Delta_1^R)$ の minimal fine neighborhood となるものとするとき, Uの成分 Mで $M \cup \{p\}$ が p の minimal fine neighborhood となるものが存在する.

定理 3 の証明. $\nu_{\widetilde{R}}(p) = n$, $\widetilde{\Delta}_1^{\widetilde{R}}(p) = \{\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_n\}$ とする.

各$\tilde{p}_i$に対し$\widetilde{N}_i \cup \{\tilde{p}_i\}$ が$\tilde{p}_i$の minimal 細近傍となるような互いに素な領域列$\widetilde{N}_1, \cdots, \widetilde{N}_n$をとり, $\widetilde{E} = \cap_{i=1}^n \widetilde{N}_i^c$とおく. $\widetilde{E}$は各$\tilde{p}_i$で minimally thin であるから, 命題 9 より, $\pi(\widetilde{E})$ は p で minimally thin である. 故に, 事実 (B) より, $R \setminus \pi(\widetilde{E})$ の連結成分 Mで $M \in \mathcal{M}_R(p)$ となるものがある. 命題 9 より, $\pi^{-1}(R \setminus M)$ は各$\tilde{p}_i$で minimally thin, 即ち$\pi^{-1}(M) \cup \{\tilde{p}_i\}$ は$\tilde{p}_i$の minimal 細近傍である. したがって, 事実 (B) より, $\pi^{-1}(M)$ の連結成分$\widetilde{O}_i$で$\widetilde{O}_i \cup \{\tilde{p}_i\}$ が$\tilde{p}_i$の minimal 細近傍となるものがとれる $(i = 1, \cdots, n)$. $\widetilde{N}_i \cap \widetilde{O}_i \neq \emptyset$ と$\pi(\partial \widetilde{N}_i) \subset R \setminus M$より, $\widetilde{O}_i \subset \widetilde{N}_i$となることが判る. 故に, $n \leq n_{\widetilde{R}}(M)$, 即ち (左辺) $\leq$ (右辺) となる.

次に, $M \in \mathcal{M}_R(p)$ を任意にとり$\pi^{-1}(M)$ の連結成分全体を $\{\widetilde{O}_1, \cdots, \widetilde{O}_k\}$ とおく. 上で述べたように, 各$\tilde{p}_i$に対し$\widetilde{O}_j \cup \{\tilde{p}_i\}$ が$\tilde{p}_i$の minimal 細近傍となる$\widetilde{O}_j$が唯 1 つ決まる. この対応で定まる $\{\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_n\}$ から $\{\widetilde{O}_1, \cdots, \widetilde{O}_k\}$ への写像をτとする. τが全射であることを示せば, (左辺) $\geq$ (右辺) となって証明が終わる. $\cup_{i=1}^n \tau(\tilde{p}_i) = \widetilde{M}$とおくと, $\widetilde{M}^c$は各$\tilde{p}_i$で minimally thin である. τが全射でなければ, $\widetilde{O}_l \subset \widetilde{M}^c$となる$\widetilde{O}_l$がある. このとき, 命題 9 より, $M = \pi(\widetilde{O}_l)$ は p で minimally thin となり $M \in \mathcal{M}_R(p)$ に矛盾する. □

5. $X = \widehat{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$, $D = \{|z| < 1\}$ とする. $R = X$または Dのとき, 定理 3 の応用例を与える.

Xに対しては, $X^* = \widehat{\mathbf{C}}$, $\Delta^X = \Delta_1^X = \{0\}$ であることは容易に確かめられる. $\{a_n\}$ を $1 > a_n \downarrow 0$ をみたす数列とする. $I = \cup_{n=1}^{\infty} [a_{2n}, a_{2n-1}]$, $G = X - I$ (resp. $G = D - I$) とおく. G の copy $G_1, \cdots, G_m$を用意し, G_i上の Iの下岸と G_{i+1}上の Iの上岸を (mod m) 溶接してできる $\mathcal{E}_m(X)$ に属する被覆面を$\widetilde{X}_0$とする.

命題 10. (i) I**が** $0 \in \Delta_1^X$**で minimally thick(=not thin) ならば,** $\nu_{\widetilde{X}_0}(0) = 1$;
(ii) I**が** $0 \in \Delta_1^X$**で minimally thin ならば,** $\nu_{\widetilde{X}_0}(0) = m$.

証明. (i) $M \in \mathcal{M}_X(0)$ を任意にとる. $X \setminus M$は $0 \in \Delta_1^X$で minimally thin である. このとき, $E := \{|z| : z \in X \setminus M\}$ は $0 \in \Delta_1^X$で minimally thin であることが知られている (cf. [HL]). 従って, 仮定と事実 (A) より, $I \setminus E$は $0 \in \Delta_1^X$で minimally thick である. 故に, $C := \{|z| = r\} \subset M$をみたす実数 $r \in I$が存在する. $\widetilde{X}_0$の作り方から, $\pi_{\widetilde{X}_0}^{-1}(C)$ が連結であることが容易に分かる. これと $C \subset M$および Mが連結であることから, $\pi_{\widetilde{X}_0}^{-1}(M)$ が連結, すなわち $n_{\widetilde{X}_0}(M) = 1$ となる. $M(\in \mathcal{M}_X(0))$ は任意であったから, 定理 3 より結論を得る.

(ii) $M = X \setminus I$とおくと, 仮定より, $M \in \mathcal{M}_X(0)$ である. $\widetilde{X}_0$の作り方から, $n_{\widetilde{X}_0}(M) = m$ であることは明かである. 故に, 任意の $N \in \mathcal{M}_X(0)$ に対し $n_{\widetilde{X}_0}(N) \leq m$ であることに注意すれば, 定理 3 より$\nu_{\widetilde{X}_0}(0) = m$ が従う. □

次に, $D = \{|z| < 1\}$ について考える. よく知られているように (cf [C-C], [HL]), $D^* = \{|z| \leq 1\}$, $\Delta^D = \Delta_1^D = \{|z| = 1\}$ である. $\{b_n\}$ を $0 < b_n \uparrow 1$ をみたす数列とする. $J = \cup_{n=1}^{\infty}[b_{2n-1}, b_{2n}]$, $G = D - J$ おく. G の copy $G_1, \cdots, G_m$を用意し, G_i上の Jの下岸と G_{i+1}上の Jの上岸を (mod m) 溶接してできる $\mathcal{E}_m(D)$ 属する被覆面を$\widetilde{D}_0$とする.

命題 11. **(i)** **Jと $J^* := \cup_{n=1}^{\infty}[b_{2n}, b_{2n+1}]$ が共に $1 \in \Delta_1^D$で minimally thick ならば, $\nu_{\widetilde{D}_0}(1) = 1$;**
(ii) Jまたは J^*が $1 \in \Delta_1^D$で minimally thin ならば, $\nu_{\widetilde{D}_0}(1) = m$.

命題 11 の証明のためには, 定理 3 とは別に次の 2 つの事実が必要である (cf. [A], [E], [LF]).

事実 (C). **Sを $z = 1$ を頂点とする Dの Stolz 領域とする. Sの部分集合 Eが $1 \in \Delta_1^D$で minimally thin のとき, $E' := \{1 - |z - 1| : z \in E\}$ も $1 \in \Delta_1^D$で minimally thin である.**

事実 (D). **$M \in \mathcal{M}_D(1)$ とする. このとき, $\{|z - 1| = 1\}$ の極 (polar) 部分集合 Zで次の性質を持つものが存在する: $l_\theta \cap Z = \emptyset$, $l_\theta \cap D \neq \emptyset$ をみたす任意の半直線 $l_\theta = \{\arg(z-1) = \theta\}$ に対して, $l_\theta \cap \{0 < |z| < \rho\} \subset M$となる$\rho(> 0)$ が存在する.**

命題 11 の証明. (i) $M(\in \mathcal{M}_D(1))$ を任意にとる. 事実 (D) より, 実数α, $\beta(\pi/2 < \alpha < \pi < \beta < 3\pi/2)$ および $r(> 0)$ で

$$\{z : \arg(z-1) = \alpha,\ 0 < |z-1| \leq r\} \cup \{z : \arg(z-1) = \beta,\ 0 < |z-1| \leq r\} \subset M$$

をみたすものが存在する. 次に, $E := D \cap \{z : \alpha \leq \arg(z-1) \leq \beta\} \setminus M$は $1 \in \Delta_1^D$で minimally thin であるから, 仮定と事実 (A) および (C) より, $J \setminus E'$と $J^* \setminus E'$は共に $1 \in \Delta_1^D$で minimally thick である. 故に, 実数 s, t $(0 < t < s)$ で $s \in J$, $t \in J^*$および

$$\{z : |z-1| = s,\ \alpha \leq \arg(z-1) \leq \beta\} \cup \{z : |z-1| = t,\ \alpha \leq \arg(z-1) \leq \beta\} \subset M$$

をみたすものが存在する.

$$\{z : \arg(z-1) = \alpha, t \leq |z-1| \leq s\},\quad \{z : |z-1| = s,\ \alpha \leq \arg(z-1) \leq \beta\},$$
$$\{z : \arg(z-1) = \beta,\ t \leq |z-1| \leq s\},\quad \{z : |z-1| = t,\ \alpha \leq \arg(z-1) \leq \beta\}$$

を順に結んで得られる閉曲線をCとおく. $\widetilde{D}_0$の作り方から, $\pi_{\widetilde{D}}^{-1}(C)$ が連結となることが容易に確かめられる. これと $C \subset M$および Mが連結であることから, $\pi_{\widetilde{D}}^{-1}(M)$ が連結, すなわち $n_{\widetilde{D}_0}(M) = 1$ となる. $M(\in \mathcal{M}_D(1))$ は任意であったから, 定理 3 より結論を得る.

(ii) J(または J^*) が $1 \in \Delta_1^D$で minimally thin とする. $M = D \backslash J$ (または $D \backslash (J \cup [-1, b_1])$)

とおくと, $M \in \mathcal{M}_D(1)$ である. $\widetilde{D}_0$の作り方から, $n_{\widetilde{D}_0}(M) = m$ であることは明かである. 故に, 任意の $N \in \mathcal{M}_D(1)$ に対し $n_{\widetilde{D}_0}(N) \le m$ であることに注意すれば, 定理 3 より $\nu_{\widetilde{D}_0}(1) = m$ が従う. □

6. 前節と同様に $D = \{|z| < 1\}$ する. 本節では, 定理 2 の見地から定理 3 を使って, $HP(\widetilde{D}) = HP(D) \circ \pi_{\widetilde{D}}$となる$\widetilde{D} \in \mathcal{E}(D)$ の例を与える.

定理 12. $\zeta \in \Delta_1^D$, $\widetilde{D} \in \mathcal{E}(D)$, **$\widetilde{D}$の分岐点全体の射影を** A **とする.** A **の可算部分集合** $B_\zeta = \{b_n : n \ge n_0\}$ **および正定数** $C(<1)$ **が存在して次の条件をみたすとする:**
(a) 各 $b_n\,(\in B_\zeta)$ **の上には位数** $m-1$**(重複度** m**) の**$\widetilde{D}$**の分岐点がある,**
(b) 任意の $b_n\,(\in B_\zeta)$ **と** $z\,(\in A \setminus \{b_n\})$ **に対し,** $|z - b_n| \ge C2^{-n}$.
(c) $2^{-n-1} \le |b_n - \zeta| \le 2^{-n} \quad (n \ge n_0)$,
(d) $B_\zeta \subset S_C(\zeta) := \{z \in D : C|z-\zeta| \le 1 - |z|\}$,
このとき, $\nu_{\widetilde{D}}(\zeta) = 1$ **である.**

$\mathbf{C}$ の相対 compact な Borel 集合 Kに対し, Kの対数容量を$\lambda(K)$ とする (cf. [T]). Dにおける minimal thinness の必要条件として, 次のことが知られている (cf. [LF], [J]).

事実 (E). $\zeta \in \Delta_1^D$, E**を** $S_C(\zeta)$ **の閉部分集合とする.** E**が**ζ**で minimally thin ならば,**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log \frac{1}{\lambda(E_n)}} < \infty,$$

ただし, $E_n = E \cap \{2^{-n-1} \le |z-\zeta| \le 2^{-n}\}$ **とする.**

定理 12 の証明. $M(\in \mathcal{M}_D(\zeta))$ を任意にとる. もし $b_n \in M \cap B_\zeta$となる b_nが存在すれば, (a) と Mの連結性より, $\pi_{\widetilde{D}}^{-1}(M)$ の連結性が容易に従い, 定理 3 より結論を得る. それ故, 以下では, $M \cap B_\zeta = \emptyset$(従って, $B_\zeta \subset D \setminus M$) と仮定する. $F = D \setminus M$とおき, b_nを含む Fの連結成分を F_nとする ($n \ge n_0$). ここで, さらに, ある F_nに対して $\mathrm{d}(F_n) < C2^{-n}$が成り立つとする ($\mathrm{d}(K)$ は Kの直径). このとき, F_nをその内部に含む Jordan 閉曲線γ_nで

$$\mathrm{d}(F_n) < \mathrm{d}(\gamma_n) < C2^{-n} \quad \text{かつ} \quad \gamma_n \subset M$$

となるものが存在する. (b) に注意すれば, γ_nの上または内部にある A の点は b_nのみである. 故に, (a) より, $\pi_{\widetilde{D}}^{-1}(\gamma_n)$ は連結となる. これと$\gamma_n \subset M$および Mの連結性より, $\pi_{\widetilde{D}_1}(M)$ も連結となり, 定理 3 より結論を得る. 以上より, $\mathrm{d}(F_n) < C2^{-n}$となる F_nが存在することを示せば良い.

背理法により, $\mathrm{d}(F_n) < C2^{-n}$となる F_nが存在することを示す. すべての n ($n \ge n_0$) に対して,

$$\mathrm{d}(F_n) \ge C2^{-n} \tag{8}$$

と仮定する. $E = F \cap S_{\frac{C}{2}}(\zeta)$ とおき, b_nを含むEの連結成分をF_n^*とする. このとき, (c),(d) および (8) より,

$$\mathrm{d}(F_n^*) \geq C_1 2^{-n} \quad (n \geq n_0) \tag{9}$$

をみたす正定数$C_1(\leq C)$が存在することが確かめられる. $E_n = E \cap \{2^{-n-1} \leq |z-\zeta| \leq 2^{-n}\}$ とおく. 各$n(\geq n_0)$に対し, $b_n \in E_n$と (9) より, E_{n-1}, E_n, E_{n+1}の少なくとも1つは, 直径が$C_1 2^{-n-1}$以上の連続体を含むことが分かる. これより

$$\max\{\lambda(E_{n-1}), \lambda(E_n), \lambda(E_{n+1})\} \geq C_1 2^{-n-3} \quad (n \geq n_0)$$

となる (cf. [T]). 従って

$$\frac{1}{\log \frac{1}{\lambda(E_{n-1})}} + \frac{1}{\log \frac{1}{\lambda(E_n)}} + \frac{1}{\log \frac{1}{\lambda(E_{n+1})}} \geq \frac{1}{n \log 2 + \log(8/C_1)} \quad (n \geq n_0)$$

となる. 故に

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0-1}^{\infty} \frac{1}{\log \frac{1}{\lambda(E_n)}} &\geq \frac{1}{3} \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{\log \frac{1}{\lambda(E_{n-1})}} + \frac{1}{\log \frac{1}{\lambda(E_n)}} + \frac{1}{\log \frac{1}{\lambda(E_{n+1})}} \right) \\ &\geq \frac{1}{3} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n \log 2 + \log(8/C_1)} = \infty \end{aligned}$$

となり, Eは$\zeta \in \Delta_1^D$で minimally thin であるから, これは事実 (E) と矛盾する. □

命題 13. $A = \{(1-2^{-n-1})e^{i2\pi k/2^{n+2}} : n = 1, 2, \cdots, k = 1, \cdots, 2^{n+2}\}$ とする. $\widetilde{D}_1$をAの各点の上に重複度mの分岐点を持つ$\mathcal{E}_m(D)$に属する被覆面をとする. このとき, $HP(\widetilde{D}_1) = HP(D) \circ \pi_{\widetilde{D}_1}$.

証明. $\zeta \in \Delta_1^D$を任意にとる. 正整数nに対し,

$$|\arg \zeta - \frac{2\pi k}{2^{n+2}}| \leq \frac{\pi}{2^{n+2}} \tag{10}$$

をみたす正整数$k = k(\zeta, n)$ $(1 \leq k \leq 2^{n+2})$ をとり,

$$b_n = (1-2^{-n-1})e^{i2\pi k/2^{n+2}} \ (\in A),$$

さらに$B_\zeta = \{b_n : n \geq 1\}$, $C = \frac{1}{4}$とおく. このB_ζとCが定理12の条件 (a) をみたすことは言うまでもないし, 条件 (b) をみたすことは容易に示せる. また, (10) より

$$(2^{-n-1})^2 \leq |b_n - \zeta|^2 \leq (2^{-n-1})^2 + 4\sin^2 \frac{\pi}{2^{n+3}}$$

となることが分かる. これより, (c),(d) をみたすことも容易に確かめられる. 従って, 定理12より, 任意の$\zeta \in \Delta_1^D$に対して$\nu_{\widetilde{D}_1}(\zeta) = 1$となる. 故に, 定理2より, 結論を得る. □

References

[A] H. AIKAWA, *Quasiaddtivity of capacity and minimal thinness*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **18**(1993), 65-75.

[B-H] J. BLIEDTNER AND W. HANSEN, *Potential Theory*, Springer, 1986.

[B] M. BRELOT, *On Topologies and Boundaries in Potential Theory*, Lecture Notes in Math. **175**, Springer, 1971.

[C-C] C. CONSTANTINESCU AND A. CORNEA, *Ideale Ränder der Riemannscher Flächen*, Springer, 1963.

[E] M. ESSÉN, *Minimal thinness, reduced functions and Green potentials*, Proc. Edinburgh. Math. Soc., **36**(1992), 87-106.

[H] M. HEINS, *Riemann surfaces of infinite genus*, Ann. of Math., **55**(1952), 296-317.

[HL] L. HELMS, *Introduction to Potential Theory*, Wiley-Interscience, 1969.

[J] H. L. JACKSON, *Some results on thin sets in a half plane*, Ann. Inst. Fourier, **20**(1970), 201-218.

[LF] J. LELONG-FERRAND, *Etude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace*, Ann. Ecole N. Sup., **66**(1949), 125-159.

[M] H. MASAOKA, *Criterion of Wiener type for minimal thinness on covering surfaces*, Proc. Japan Acad., **72**(1996), 154-156.

[M-S1] H. MASAOKA AND S. SEGAWA, *Harmonic dimension of covering surfaces*, Kodai Math. J., **17**(1994), 351-359.

[M-S2] H. MASAOKA AND S. SEGAWA, *Harmonic dimension of covering surfaces and minimal fine neighborhood*, Osaka J. Math., **34**(1997), 659-672.

[N] L. NAÏM, *Sur le rôle de la frontiére de R.S. Martin dans la théorie du potentiel*, Ann. Inst. Fourier, **7**(1957), 183-281.

[T] M. TSUJI, *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen, 1959.